



TITLE:

無限極限集合に現れる非周期点について : SARKOVSKIIの定理より (一般及び幾何学的トポロジーとその応用)

AUTHOR(S):

横井, 勝弥

---

CITATION:

横井, 勝弥. 無限極限集合に現れる非周期点について : SARKOVSKIIの定理より (一般及び幾何学的トポロジーとその応用). 数理解析研究所講究録 2012, 1781: 108-110

ISSUE DATE:

2012-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/171841>

RIGHT:

## 無限極限集合に現れる非周期点について ～ŠARKOVSKIĬ の定理より～

横井勝弥 (KATSUYA YOKOI)

東京慈恵会医科大学 (JIKEI UNIVERSITY SCHOOL OF MEDICINE)

### 1. 序

本稿の目的は, 「[S] A.N. Šarkovskii, *Continuous mapping on a set of  $\omega$ -limit points* (Ukrainian), *Dopoviđi Akad. Nauk Ukraïn. RSR*, 1965, 1407–1410」における主結果とその証明を解説することが目的である。この主定理は, 極限集合の構造定理として興味深い主張をしているにもかかわらず, 原論文がウクライナ語で書かれている為か, あまり知られておらず, 自分自身の備忘録もかねてその解説を, [S] をもとにこの場で与えておきたい。

### 2. ŠARKOVSKIĬ の定理

*Definition.* The set of limit points of the trajectory of  $x$  under  $f$  is called the  $\omega$ -limit set of  $x$ , denoted by  $\omega(x, f)$ ; more precisely,  $z \in \omega(x, f)$  if there exists a strictly increasing sequence of positive numbers  $n_1 < n_2 < \dots$  such that  $z = \lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x)$ . We denote by  $P(f)$  the set of periodic points of  $f$ .

証明にはいくつかの Šarkovskii によるよく知られた結果が必要である。これらは例えば Block-Coppel [1] に系統的に解説されている。

**Lemma 2.1** ([2, 3], [1, p.71, Lemma 3]). *If  $W = \omega(x, f)$  is an  $\omega$ -limit set and if  $F$  is any non-empty proper closed subset of  $W$ , then*

$$F \cap \text{Cl } f(W \setminus F) \neq \emptyset.$$

**Lemma 2.2** ([2], [1, p.72, Lemma 4]). *An  $\omega$ -limit set  $\omega(x, f)$  contains only finitely many points if and only if  $x$  is asymptotically periodic. If  $\omega(x, f)$  contains infinitely many points, then no isolated point of  $\omega(x, f)$  is periodic.*

**Lemma 2.3** ([2, 3], [1, p.72, Lemma 5]). *If an  $\omega$ -limit set  $W = \omega(x, f)$  contains an interval, then  $W$  is the union of finitely many disjoint*

---

The author was partially supported by the Grant-in-Aid for Scientific Research (C) (No. 22540098), JSPS and the Jikei University Research Fund.

closed intervals  $J_1, \dots, J_p$  such that  $f(J_k) = J_{k+1}$  ( $1 \leq k < p$ ) and  $f(J_p) = J_1$ .

**Theorem 2.4** ([S] Šarkovskii). Let  $f : X \rightarrow X$  be a map from a compact metric space  $X$  to itself. If an  $\omega$ -limit set  $W = \omega(x, f)$  is infinite, then any its open (in  $W$ ) zero-dimensional subset contains at least one non-periodic point.

**Corollary 2.5** ([S] Šarkovskii). Let  $f : I \rightarrow I$  be a map from a compact interval  $I$  to itself. If an  $\omega$ -limit set  $W = \omega(x, f)$  is infinite, then the non-periodic points of  $W$  are dense in  $W$ .

*Proof.*  $W$  の 0 次元開集合  $U$  で  $U \subseteq P(f)$  となるものが存在したとして矛盾を導こう。ここで,  $U$  は  $W$  において開かつ閉集合としてよい。また,

$$(1) \quad \bigcup_{i=0}^{\infty} f^i(U) \subsetneq W$$

であるとしてもよい。なぜなら,  $y \in W \cap P(f)$  とするとき, Lemma 2.2 を用いると,

$$U \setminus \{f^i(y) \mid i = 0, 1, \dots\}$$

が,  $W$  における空でない開集合であることがわかる。この部分集合となるような空でない開かつ閉集合を改めて  $U$  とすればよい。

この  $U$  をもとにして, 帰納的に閉集合列  $M^0, M^1, \dots$  を

$$M^0 = U, M^i = f(M^{i-1}) \setminus U \quad (i = 1, 2, \dots)$$

と定めよう。このとき,

$$(2) \quad M^{i_0} = \emptyset$$

となる自然数  $i_0 \in \mathbb{N}$  が存在する。いま仮に, 任意の  $i \in \mathbb{N}$  について  $M^i \neq \emptyset$  としてみよう。ここで

$$N^i = \{y \in U \mid f^i(y) \in M^i\} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

とおく。  $M^i$  の定め方と  $U \subseteq P(f)$  であることを用いると, この閉集合列は減少列であることがわかる。よって,  $X$  のコンパクト性により  $z \in \bigcap_{i=1}^{\infty} N^i$  となる点  $z$  が存在することになるが,

$$z \in U, f^i(z) \notin U \quad (i = 1, 2, \dots)$$

により  $z$  は非周期点となり, 矛盾する。

(2) を満たす  $i_0$  について

$$V = \bigcup_{i=0}^{i_0-1} M^i$$

とおくとき, 閉集合  $V$  は

$$V = \bigcup_{i=0}^{\infty} f^i(U), \quad V \subseteq P(f), \quad f(V) = V$$

となることに注意する。いま  $\{f^{-i}(U) \mid i = 1, 2, \dots\}$  は  $V$  の開被覆であるから

$$V \subseteq f^{-1}(U) \cup \dots \cup f^{-n}(U)$$

となる  $n \in \mathbb{N}$  が存在する。この  $n$  について

$$H = \bigcup_{i=1}^n f^{-i}(U)$$

とおくとき,  $V \subseteq H$ ,  $f(H) \subseteq H$  であり, また  $f(W) = W$  と  $f^n(H) = V \subsetneq W$  (by (1)) により

$$H \cap W \subsetneq W$$

となることがわかる。このとき

$$(W \setminus H) \cap \text{Cl } f(W \setminus (W \setminus H)) = \emptyset$$

であるが, これは Lemma 2.1 に矛盾する。従って

$$U \cap (X \setminus P(f)) \neq \emptyset$$

でなければならない。□

*Proof of Corollary.*  $W$  が完全不連結のときは, Theorem 2.4 より示される。 $W$  が区間を含むときは, まず Lemma 2.3 より  $W$  を有限個の周期的な閉区間の和で表す。このとき,  $W$  に含まれる任意の開区間は  $\omega(z, f) = W$  となる点  $z$  をもつので題意が示される。□

## REFERENCES

- [1] L.S. Block and W.A. Coppel, *Dynamics in one dimension*, Lecture Notes in Mathematics, 1513, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [2] A.N. Šarkovskii, *On attracting and attracted sets*, (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR, 160, (1965), 1036–1038.
- [3] A.N. Šarkovskii, *Continuous mapping on the limit points of an iteration sequence*, (Russian), Ukrain. Mat. Ž., 18 (5), (1966), 127–130.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, JIKEI UNIVERSITY SCHOOL OF MEDICINE,  
CHOFU, TOKYO 182-8570, JAPAN

E-mail address: yokoi@jikei.ac.jp